Mehr Folgen und Mengen I

- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge $\mathbb{C}$. $y \in \mathbb{C}$ ist Häufungspunkt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt: in $U_\varepsilon(y)$ liegen ∞-viele F-Glieder

Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend

[y Häufungspunkt $\Leftrightarrow$ $\exists$ Teilfolge, die gegen y konvergiert]

[Folge konvergiert $\Rightarrow$ jede Teilfolge konvergiert gegen denselben Grenzwert]

- Monotone Konvergenz — Monotoniekriterium

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt monoton reell $\Rightarrow$ konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{falls mon. wachsend} \\ \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{falls mon. fallend} \end{cases}$$

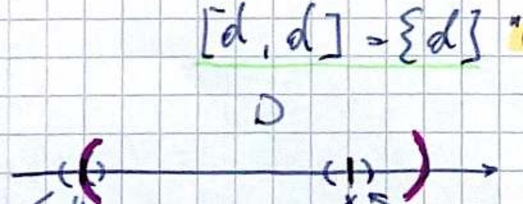
Intervalle

$(a \quad , \quad b)$ ← gehören nicht dazu

Infimum — Supremum

$[a \quad , \quad b]$ ← gehören dazu

$[d, d] = \{d\}$ "entartetes" Intervall



jede ε-Umgebung enthält Punkte aus D und nicht aus D enthält → Randpunkt ∂M

ε-Umgebung existiert, die komplett in D ist → innerer Punkt $\mathring{M}$

- offene Menge: jedes Element ist innerer Punkt

(Bsp.: offene Intervalle, $\mathbb{R}$, $\emptyset$)

nicht $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$\bigcup$ offener Mengen $\Rightarrow$ offen

$\bigcap$ endlich vieler offener Mengen $\Rightarrow$ offen

Mehr Folgen u. Mengen II

abgeschlossene Menge A: jeder Häufungspunkt von A liegt bereits in A

(Bsp: abgeschlossene Intervalle, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\emptyset$)
nicht $\mathbb{Q}$

$$\left[\begin{array}{l} A \text{ offen} \Leftrightarrow \bar{A} \text{ abgeschlossen} \\ A \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \bar{A} \text{ offen} \end{array}\right]$$

$\bigcap$ abgeschlossener Mengen $\to$ abgeschlossen

$\bigcup$ endlich vieler abgeschl. Mengen $\to$ abgeschlossen

Intervallschachtelung: Folge abgeschlossener Intervalle $\boxed{I_n = [a_n, b_n]}$, wobei
- $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $(b_n - a_n)_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

also
- $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n$
- $(a_n)_n$ mon. wachs., $(b_n)_n$ mon. fallend
- $(a_n)_n$ u. $(b_n)_n$ konvergieren gegen denselben GW
- $\boxed{r \in I_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $r = \sup\{a_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $r = \inf\{b_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Satz von Bolzano-Weierstraß

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) $\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

Beweis: Intervallschachtelung (Hälfte d. Intervalls)
(Intervallhalbierung)

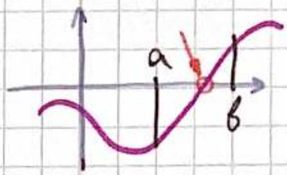
Mehr Folgen u. Funktionen

Zwischenwertsatz: $\boxed{f: J \to \mathbb{R}}$ stetig, $\boxed{a, b \in J}$,

$\boxed{f(a) < 0 < f(b)} \Rightarrow \boxed{\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = 0}$

→ über Intervallhalbierung

oder $f(a) < \eta < f(b)$



Mengen u. Abzählbarkeit

- S u. T gleich mächtig, wenn es bijektive Abb. $\boxed{f: S \to T}$ gibt
- M abzählbar, wenn es injektive Abb. $\boxed{f: M \to \mathbb{N}}$ gibt
  - $f(M)$ beschränkt $\Rightarrow \boxed{\# f(M) = \# M < \infty}$
  - $f(M)$ unbeschränkt $\to \boxed{\# f(M) = \infty}$

$\Rightarrow$ M ist abzählbar unendlich

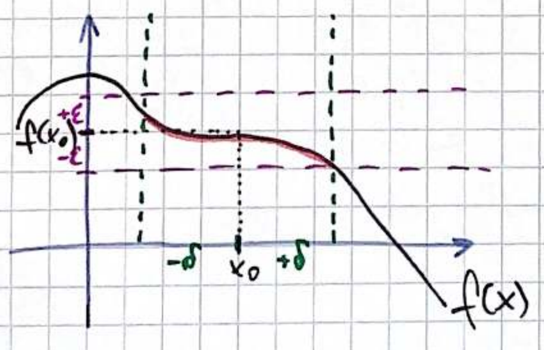
$\Rightarrow$ es gib bijektive Abb. $\boxed{\tilde{f}: M \to \mathbb{N}}$

Wieder Funktionen I

ε-δ-Kriterium für Stetigkeit

$f: D \to \mathbb{R}$, betrachte x_0:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : (x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))}$$



f stetig $\Rightarrow$ f in kleiner Umgebung beschränkt

$\Rightarrow$ es existieren $\delta > 0$, $c \in \mathbb{R}$, sodass

$\boxed{\forall x \in U_\delta(x_0) : |f(x)| < c}$

f stetig auf $[a,b] \Rightarrow f([a,b])$ ist ein Intervall

Satz vom Minimum u. Maximum

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f([a,b])$ beschränkt

$\Rightarrow \boxed{m = \min f([a,b])} \quad \boxed{M = \max f([a,b])}$

$\Rightarrow \exists\ x_m, x_M \in [a,b]$ mit $\boxed{f(x_m) = m}$ u. $\boxed{f(x_M) = M}$

Wieder Funktionen II

Intervall!

$f: J \to W$ streng monoton stetig mit $f(J) = W$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}: W \to J}$ auch stetig

Stetigkeit funktioniert basically genauso auf komplexen Plots wie auf reellen.